

Субриманова геометрия на группе $SO(3)$ и её приложения

И.Ю. Бесчастный

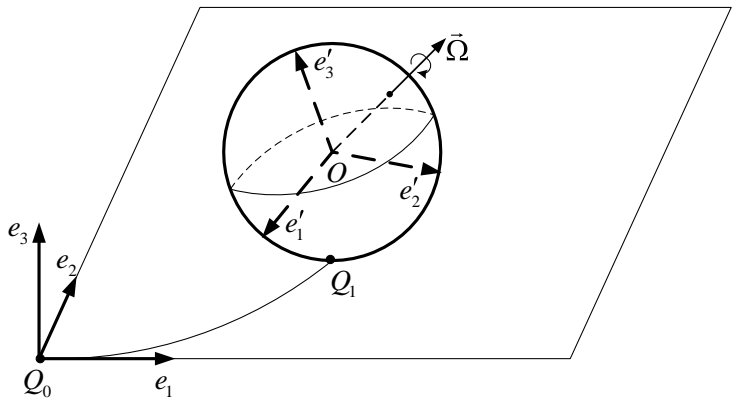
Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН
Переславль-Залесский

Общеинститутский семинар ИПС им. А.К. Айламазяна РАН
Переславль-Залесский, 19 июня 2015

Планирование пути сферического робота

Формулировка задачи

Шар катится по горизонтальной плоскости.



Неподвижный репер e_i , Подвижный репер e'_i ,
вектор угловой скорости $\vec{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$

Формулировка задачи

Состояние системы:

- $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ — точка касания сферы и плоскости,
- $R \in SO(3)$ — матрица ориентации шара.

Задача: Перекатить шар из начального состояния $Q_0 = (x_0, y_0, R_0)$ в конечное $Q_1 = (x_1, y_1, R_1)$.

Использование сферических мобильных роботов

Преимущества:

- Хорошая проходимость на различных рельефах
- Можно использовать на воде и на снегу

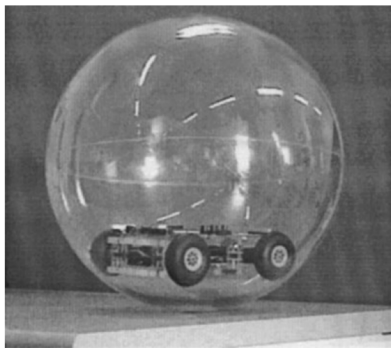
Недостатки:

- Сложные конструкции
- Сложное управление

Чтобы найти закон управления, переводящий робота из одного состояния в другое, можно использовать методы теории оптимального управления.

Физические принципы построения сферических роботов [Chase et al.]

Изменение положения центра масс



Роботы типа "прогулочный шар"[Alves, Dias] и "маятник"[Rotundus]

Физические принципы построения сферических роботов [Chase et al.]

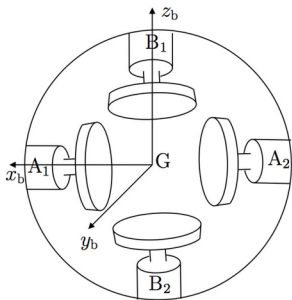
Деформация внешней оболочки



Робот MorpHex [Halvorsen].

Физические принципы построения сферических роботов [Chase et al.]

Закон сохранения углового момента



Дизайн робота с четырьмя внутренними роторами [Joshi et al.]

Сохранение углового момента



Задача оптимального управления

Кинематическая модель сферического робота

$$\dot{x} = -\Omega_2, \quad \dot{y} = \Omega_1, \quad \dot{R} = R \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q = (x, y, R) \in \mathbb{R}^2 \times SO(3), \quad (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) \in \mathbb{R}^3,$$

$$Q_0 = (x_0, y_0, R_0), \quad Q_1 = (x_1, y_1, R_1).$$

Чтобы найти закон управления, можно поставить задачу о минимизации некоторого функционала. Мы выбрали функционал вида

$$\int_0^{t_1} \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2}{2} dt \rightarrow \min, \quad t_1 \text{ фиксировано.}$$

Субриманова задача

Управляемая система

$$\dot{Q} = \Omega_1 X_1(Q) + \Omega_2 X_2(Q) + \Omega_3 X_3(Q)$$

описывает допустимые кривые в G , т.е. липщицевы кривые, вектор скорости которых лежит в $\Delta = \text{span}\{X_1, X_2, X_3\}$ для почти всех t .
Из неравенства Коши-Буняковского следует:

$$\frac{1}{2} \int_0^{t_1} (\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2) dt \rightarrow \min \iff \int_0^{t_1} \sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2} dt \rightarrow \min$$

Субриманова задача: Для заданного распределения Δ и метрики в нём найти допустимую кривую минимальной длины, которая соединяет заданные точки Q_0, Q_1 .

Управляемость и существование оптимальных траекторий

$$\dot{Q} = \sum_{i=1}^3 \Omega_i X_i(Q), \quad Q \in \mathbb{R}^2 \times SO(3), \quad (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) \in \mathbb{R}^3$$

- $\text{span}\{X_1, X_2, X_3, [X_1, X_3], [X_2, X_3]\}(Q) = T_Q G$ для любой точки Q .
По теореме Рашевского-Чжоу система вполне управляема.
- Существование оптимальных траекторий следует из теоремы Филиппова.

Параметризация аномальных геодезических

Теорема

Аномальные геодезические параметризуются следующими уравнениями:

$$x = -\Omega_2 t, \quad y = \Omega_1 t, \quad R = e^{\tilde{\Omega} t},$$

где

$$\tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Omega_2 \\ 0 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

и оптимальны на любом отрезке $[0, t_1]$, $t_1 > 0$.

Качение по прямой без прокручивания и проскальзывания

Движение по аномальной траектории

Гамильтонова система принципа максимума Понтрягина в нормальном случае

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \Omega_2, & \dot{\Omega}_1 &= \omega_2 \Omega_3, \\ \dot{y} &= -\Omega_1, & \dot{\Omega}_2 &= -\omega_1 \Omega_3, \\ \dot{R} &= R\tilde{\Omega}, & \dot{\Omega}_3 &= \omega_1 \Omega_2 - \omega_2 \Omega_1 \\ & & \omega_1, \omega_2 &= \text{const} .\end{aligned}$$

$$\frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2}{2} = \text{const}, \quad (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$\tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ -\Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Нормальный случай

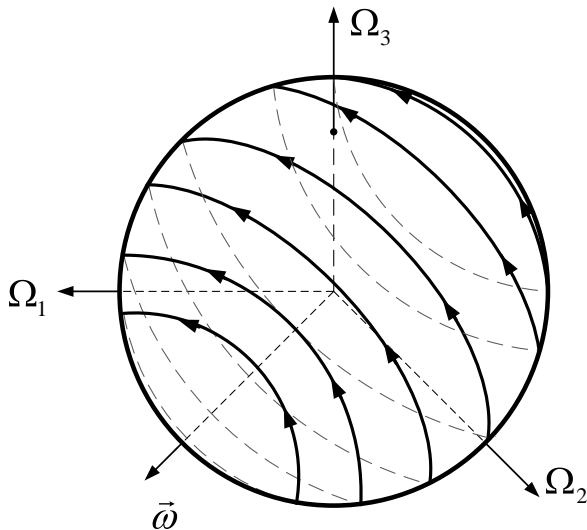
Уравнения для вектора угловой скорости:

$$\dot{\vec{\Omega}} = \vec{\omega} \times \vec{\Omega}, \quad \vec{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$$

где $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, 0) = \text{const.}$

Вектор $\vec{\Omega}$ вращается равномерно вокруг неподвижного горизонтального вектора $\vec{\omega}$.

Равномерное вращение $\vec{\Omega}$ вокруг $\vec{\omega}$



Качение по прямой

Если $\vec{\Omega} = \lambda \vec{\omega}$ для некоторых $\lambda \neq 0$ и $\vec{\omega} \neq 0$, то, проинтегрировав гамильтонову систему, мы получим уравнения аномальных геодезических.

Если $\vec{\omega} \equiv 0$, то $\vec{\Omega} = \text{const}$ и нормальные геодезические параметризуются уравнениями:

$$x = -\Omega_2 t, \quad y = \Omega_1 t, \quad R = e^{\tilde{\Omega} t},$$

где

$$\tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ -\Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Шар катится по прямой с прокручиванием.

Качение по прямой с прокручиванием

Нормальная траектория ($\vec{\omega} \equiv 0$):

Нормальная гамильтонова система ПМП

В силу симметрии вращения Φ^β , можно положить $\vec{\omega} = (\omega, 0, 0)$, тогда экстремальные траектории описываются уравнениями:

$$x = -\omega^{-1}(\Omega_2^0 \sin \omega t + \Omega_3^0 \cos \omega t - \Omega_3^0), \quad y = \Omega_1^0 t,$$

$$R(t) = e^{t(\tilde{\omega} + \tilde{\Omega}_0)} e^{-t\tilde{\omega}}.$$

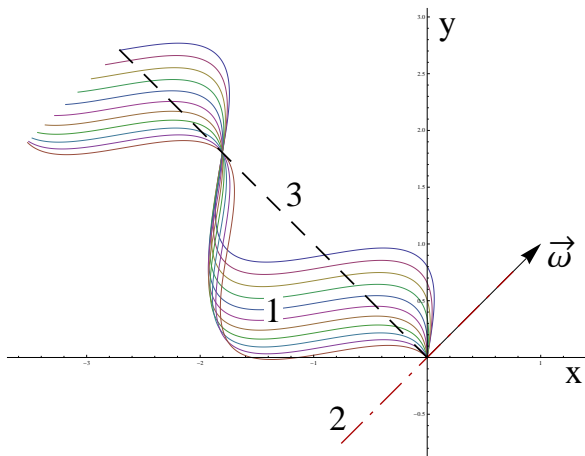
Шар катится по синусоиде, а матрица вращения является композицией двух вращений: вокруг вектора $-\vec{\omega}$ и вокруг вектора $\vec{\omega} + \vec{\Omega}_0$.

Можно использовать повороты Φ^β , чтобы получить уравнения экстремальных траекторий с произвольным $\vec{\omega}$.

Качение по синусоиде

Нормальная траектория (общий случай):

Проекции траекторий на горизонтальную плоскость



В дальнейшем мы построим закон управления с помощью траекторий типа 2 и типа 3.

Точки Максвелла и время разреза

Временем разреза называется момент времени, когда экстремальная траектория теряет оптимальность.

Оценить время разреза сверху можно с помощью точек Максвелла, т.е. таких точек, в которые встречаются две различные геодезические одинаковой длины.

Экспоненциальное отображение

$$\text{Exp} : T_{Q_0}^* G \times \mathbb{R}_+ \rightarrow G,$$

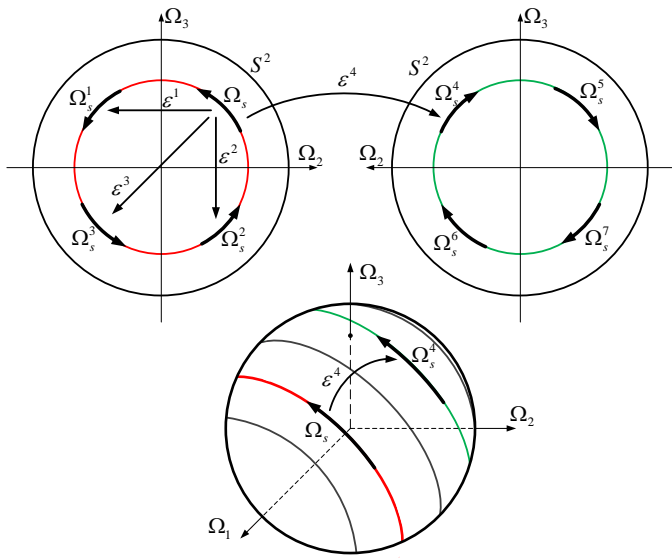
$$\text{Exp}(\lambda, t) = Q_t = (x_t, y_t, R_t),$$

$$\lambda = (\vec{\Omega}_0, \vec{\omega}) \in S^2 \times \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad Q_t \in G.$$

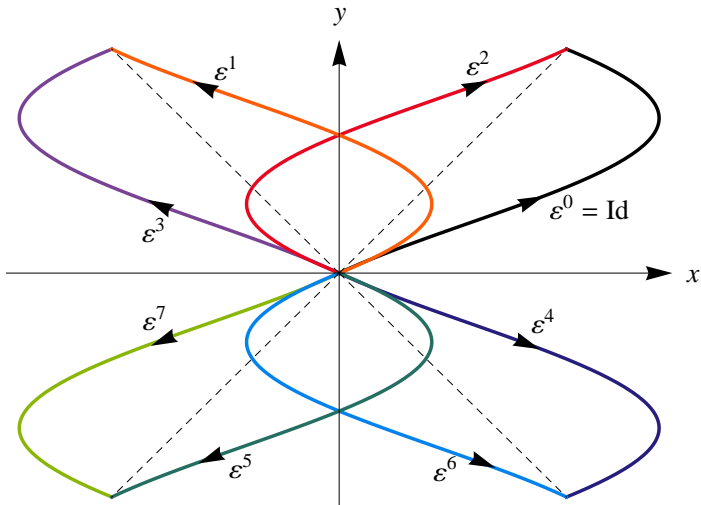
Множество Максвелла

$$\text{MAX} = \{(\lambda, t) : \exists \tilde{\lambda} \neq \lambda, \text{Exp}(\lambda, t) = \text{Exp}(\tilde{\lambda}, t)\}$$

Отражения в прообразе экспоненциального отображения



Отражения дуг синусоид на плоскости



Представление вращений с помощью кватернионов

Пусть $\mathbb{H} = \{q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 \mid (q_0, \dots, q_3) \in \mathbb{R}^4\}$ — алгебра кватернионов. Любое вращение R трехмерного пространства может быть представлено парой кватернионов единичной длины $\pm q$.

Предположим, что R есть вращение вокруг вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ на угол θ . Тогда соответствующий кватернион q задается формулой:

$$q = \cos \frac{\theta}{2} + (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \sin \frac{\theta}{2}.$$

Следовательно, можно представить обе матричные экспоненты, входящие в R , как кватернионы:

$$e^{t(\tilde{\omega} + \tilde{\Omega}_0)} = \cos \frac{|\vec{\omega} + \vec{\Omega}_0|t}{2} + \frac{(\omega + \Omega_1^0)i + \Omega_2^0j + \Omega_3^0k}{|\vec{\omega} + \vec{\Omega}_0|} \sin \frac{|\vec{\omega} + \vec{\Omega}_0|t}{2},$$

$$e^{-t\tilde{\omega}} = \cos \frac{\omega t}{2} - i \sin \frac{\omega t}{2}.$$

Время Максвелла t_{\max}

Утверждение

Точки множества $q_3 = 0$ неподвижны относительно симметрии $\Phi^\beta \circ \varepsilon^1$ и являются точками Максвелла. Величина

$$t_{\max} = \frac{2\pi}{|\vec{\omega} + \vec{\Omega}|}$$

является временем Максвелла для экстремальных траекторий, проекции которых не являются прямыми. Следовательно,

$$t_{\text{cut}} \leq t_{\max}.$$

Как перевернуть шар?

Вопрос: Как можно оптимально перекатить шар в исходную точку с новой ориентацией?

$$(x, y)(0) = (x, y)(t_1)$$

Шар может вернуться назад в начало координат только, если он катится по отрезку (или вращается на месте).

Идея решения

- 1 Сузить экспоненциальное отображение;
- 2 Отбросить все заведомо неоптимальные траектории с помощью найденного времени Максвелла;
- 3 Разбить прообраз и образ на диффеоморфные области;
- 4 Проверить, что полный прообраз каждой точки внутри диффеоморфных областей образа состоит из единственной точки в прообразе.
- 5 В силу теоремы существования, соответствующая единственная траектория будет оптимальной.

Решение задачи о переориентации шара

Теорема

Пусть $R_1 \in SO(3)$ — матрица, соответствующая повороту вокруг единичного вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ с $a_1^2 + a_2^2 \neq 1$ и $|a_3| \neq 1$ на некоторый угол. Тогда существует ровно две экстремальные траектории, переводящие шар из состояния $Q_0 = (0, 0, \text{Id})$ в $Q_1 = (0, 0, R)$, и для которых время возвращения меньше, чем t_{\max} .

Решение задачи о переориентации шара

Решение задачи оптимального управления сведено к решению системы алгебраических уравнений.

$$\cos \gamma \cos(\gamma \cos \alpha) + \cos \alpha \sin \gamma(\gamma \cos \alpha) = \pm q_0,$$

$$\cos \alpha \sin \gamma \cos(\gamma \cos \alpha) - \cos \gamma \sin \gamma(\gamma \cos \alpha) = \sqrt{q_1^2 + q_2^2},$$

$$\sin \alpha \sin \gamma = |q_3|.$$

Оптимальное управление однозначно восстанавливается по найденным решениям α, γ .

На основе полученных результатов была написана программа, решающая задачу переориентации.

Другие подходы к решению задачи

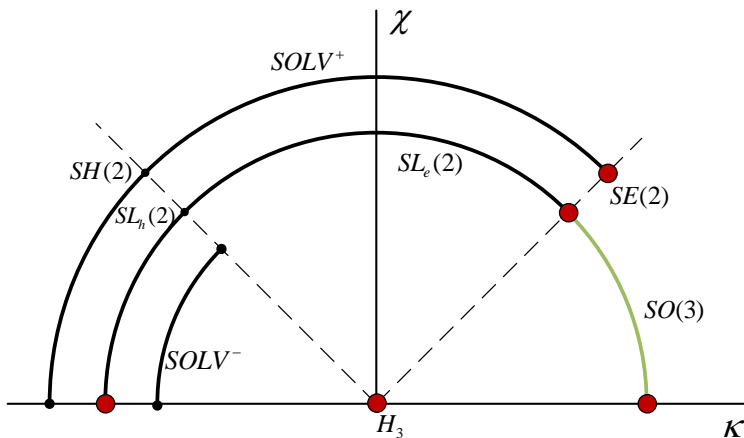
- Перекачивание по прямым и окружностям [Mukherjee et al.];
- Использование геометрических фаз [Svining et al., Mukherjee et al.];

Плюсами этих подходов являются простота и универсальность. Минусами являются низкая точность и необходимость в некотором пространстве для маневра.

Плюсы нашего подхода заключаются в точности и возможности маневра даже в ограниченных пространствах. К сожалению, этот алгоритм не работает для роботов типа "маятник".

Субриманова задача на группе $SO(3)$

Классификация субримановых структур на трехмерных группах Ли [Agrachev et al.]



Задача оптимального управления

В стандартном базисе $so(3)$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

задача оптимального управления записывается следующим образом:

$$\dot{R} = R(u_1 A_2 + u_2 \sqrt{1 - a^2} A_1) = R(u_1 f_1 + u_2 f_2) = R\Omega,$$

$$R \in SO(3), \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \quad a \in (0, 1),$$

$$R(0) = \text{Id}, \quad R(t_1) = R_1,$$

$$\int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 + u_2^2} dt \rightarrow \min,$$

где $a = a(\kappa, \chi)$ – локальный инвариант.

Связь с управлением квантовыми системами

При управлении двух- и трехуровневыми квантовыми системами возникает следующая задача [Boscain et al.]

$$\dot{\vec{x}} = \vec{x} \times \vec{\omega}, \quad \vec{x}, \vec{\omega} \in \mathbb{R}^3, \quad (1)$$

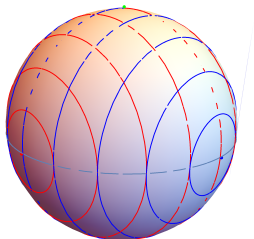
$$|\vec{x}| = 1, \quad \vec{\omega} = u_2 \sqrt{1 - a^2} \mathbf{e}_1 + u_1 \mathbf{e}_2,$$

$$\vec{x}(0) = \vec{x}_0, \quad \vec{x}(T) = \vec{x}_T,$$

$$\int_0^T \frac{u_1^2 + u_2^2}{2} dt \rightarrow \min, \quad T \text{ is fixed.}$$

Связь с управлением квантовыми системами

Два поля $\vec{x} \times e_1$, $\vec{x} \times e_2$ – это вращения вокруг двух горизонтальных осей.



Если мы введем матрицу R_t по следующему правилу

$$\vec{x}_t = R_t^{-1} \vec{x}_0,$$

то $R_t \in SO(3)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{R} = R\Omega = R(u_2\sqrt{1-a^2}A_1 + u_1A_2).$$

Уравнения геодезических

Система принципа максимума имеет вид:

$$\dot{R} = R(p_1 f_1 + p_2 f_2) = R\Omega,$$

$$\dot{p}_1 = p_0 p_2,$$

$$\dot{p}_2 = -p_0 p_1,$$

$$\dot{p}_0 = a^2 p_1 p_2.$$

Вертикальная подсистема простой заменой сводится к уравнению маятника, который интегрируется в терминах эллиптических функций Якоби.

Интегрирование горизонтальной подсистемы

Геодезические на $SO(3)$ можно параметризовать следующим образом

$$R = e^{-\phi_1(0)A_3} e^{-\phi_2(0)A_1} e^{\phi_3(t)A_3} e^{\phi_2(t)A_1} e^{\phi_1(t)A_3},$$

где

$$\begin{aligned}\cos \phi_2 &= \frac{p_0}{|p|}, & \sin \phi_2 &= \sqrt{\frac{|p|^2 - p_0^2}{|p|^2}}, \\ \cos \phi_1 &= \frac{p_1 \sqrt{1 - a^2}}{\sqrt{|p|^2 - p_0^2}}, & \sin \phi_1 &= \frac{p_2}{\sqrt{|p|^2 - p_0^2}}\end{aligned}$$

а угол ϕ_3 выражается некоторым образом через эллиптический интеграл третьего рода.

Периодические геодезические

Утверждение

Для любого значения $a \in (0, 1)$ существует бесконечное число периодических геодезических. При чем все они либо удовлетворяют условиям

$$C_1 : \sqrt{\frac{1 - a^2(1 - k^2)}{a^2(1 - a^2)}} \Pi \left(\frac{a^2 k^2}{a^2 - 1}; k^2 \right) = \frac{\pi}{2} \frac{n}{m}, \quad \frac{n}{m} > \frac{1}{a},$$

$$C_2 : \sqrt{\frac{k^2 + a^2(1 - k^2)}{a^2(1 - a^2)}} \Pi \left(\frac{a^2}{a^2 - 1}; k^2 \right) = \frac{\pi}{2} \frac{n}{m}, \quad \frac{n}{m} > 1;$$

либо являются равномерными вращениями вокруг горизонтальных осей.

Здесь $\Pi(n; k^2)$ – полный эллиптический интеграл третьего рода, $k = k(p_i)$ – переменная "действие" математического маятника, $m, n \in \mathbb{Z}$.

Прием Дирака

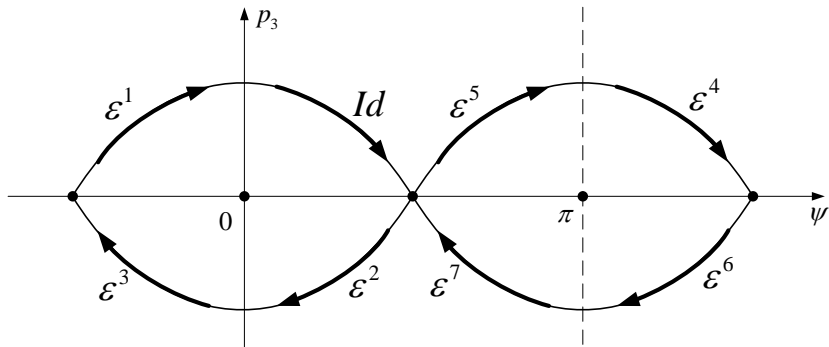


Гомотопические классы периодических геодезических

Утверждение

Рассмотрим периодическую геодезическую $R_t \in SO(3)$, которая соответствует кривой в области C_1 или C_2 , и которая задана своей дробью $n/m \in \mathbb{Q}_+$. Тогда геодезическая R_t нуль-гомотопна тогда и только тогда, когда n четно. Равномерные вращения вокруг горизонтальных осей нестягиваемы.

Дискретные симметрии в прообразе



Дискретные симметрии

Пусть q — единичный кватернион, которому соответствует матрица $R \in SO(3)$, а ω — мнимый кватернион, которому соответствуют $\Omega \in so(3)$.

$$\varepsilon^1 : \omega_s \mapsto i\omega_{t-s}i$$

$$\varepsilon^2 : \omega_s \mapsto k\omega_{t-s}k$$

$$\varepsilon^3 : \omega_s \mapsto -j\omega_{t-s}j$$

$$\varepsilon^4 : \omega_s \mapsto -k\omega_{t-s}k$$

$$\varepsilon^5 : \omega_s \mapsto j\omega_{t-s}j$$

$$\varepsilon^6 : \omega_s \mapsto -\omega_{t-s}$$

$$\varepsilon^7 : \omega_s \mapsto -i\omega_{t-s}i$$

$$\varepsilon^1 : q_s \mapsto -iq_t^{-1}q_{t-s}i$$

$$\varepsilon^2 : q_s \mapsto -iq_t^{-1}q_{t-s}i$$

$$\varepsilon^3 : q_s \mapsto -jq_sj$$

$$\varepsilon^4 : q_s \mapsto -kq_s k$$

$$\varepsilon^5 : q_s \mapsto -jq_t^{-1}q_{t-s}j$$

$$\varepsilon^6 : q_s \mapsto q_t^{-1}q_{t-s}$$

$$\varepsilon^7 : q_s \mapsto -iq_s i$$

Теорема

Пусть $R_s \in SO(3)$, $s \in [0, t]$ – геодезическая, а $q_s \in S^3$ – её поднятие на S^3 . Тогда кривая R_s неоптимальна, если для некоторого времени $s_0 \in (0, t)$ выполняется одно из следующих условий:

- ❶ $q_0(s_0) = 0$;
- ❷ $q_1(s_0) = 0$ и $\sin \tau \neq 0$, если $p_0 \in C_1 \cup C_2$, или $\tau \neq 0$, если $p_0 \in C_3$;
- ❸ $q_2(s_0) = 0$ и $\sin \tau \neq 0$, если $p_0 \in C_1$;
- ❹ $q_3(s_0) = 0$ и $\sin \tau \neq 0$, если $p_0 \in C_2$.

Здесь $\tau = \tau(s, p_1(0), p_2(0), p_3(0))$ – некоторая замена переменной времени.

Возвращение к задаче на сфере

Пусть $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z = 0\}$. Справедлива следующая теорема

Теорема (Bonnard et al.)

- 1 Гауссова кривизна почти римановой структуры на S^2 отрицательна на S^2/S для всех $a \in [0, 1)$.
- 2 Геодезический поток на почти римановой сфере обладает двумя симметриями отражения: относительно S и относительно плоскости $x = 0$.
- 3 Если $\vec{\gamma}_0 \in \mathcal{S}$, то $\mathcal{S} \setminus \{\vec{\gamma}_0\}$ является множеством разреза.

Оценка на время разреза

В силу предыдущей теоремы мы должны решить уравнение

$$z(t) = 0 \iff \sin \phi_3(t) = 0.$$

Утверждение

В семействе субримановых задач на группе $SO(3)$ верна следующая оценка на время разреза:

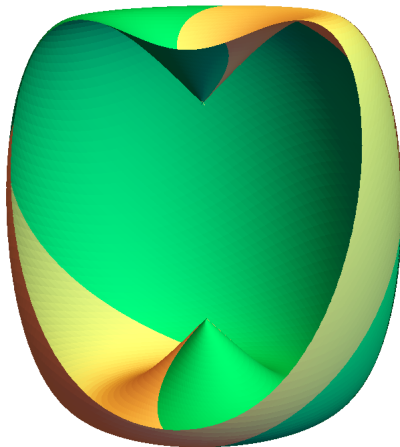
$$t_{cut} \leq \frac{\pi}{\sqrt{M(1-a^2)}} + \pi,$$

где M — длина вектора импульса.

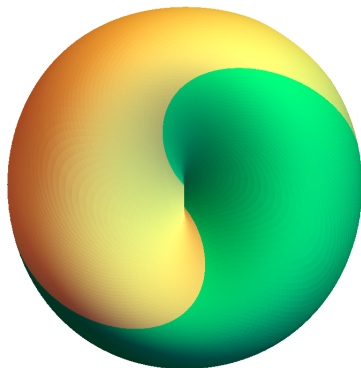
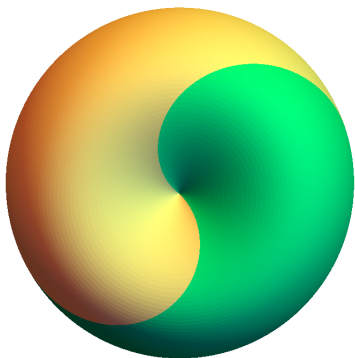
В частности, для диаметра $\text{diam}_{SO(3)}(a)$ субримановой метрики справедлива оценка

$$\text{diam}_{SO(3)}(a) \leq \pi + \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}.$$

Волновой фронт



Волновой фронт



Основные результаты

Задача о качении шара:

- Получены новые условия оптимальности;
- Решена задача о переориентации;
- Написана программа для планирования пути сферического робота.

Субримановы задачи на $SO(3)$

- Получены новые условия оптимальности;
- Описаны все периодические геодезические;
- Получены оценки на времена разреза и диаметры метрик.

Планируемые задачи

- Численное построение множества разреза на $SO(3)$;
- Численное построение каустики на $SO(3)$;
- Адаптация программ для других унимодулярных групп Ли.

Спасибо за внимание

Список использованных источников

- R. Chase, A. Pandya. A review of Active Mechanical Driving Principles of Spherical Robots. Robotics, vol. 1, 2012, p.3-23.
- Alves, J.; Dias, J. Design and control of a spherical mobile robot. Proc IME J. Syst. Contr. Eng. 2003, 217, 457–467.
- <http://www.rotundus.se/>
- <http://blog.robotpark.com/designproject/morphex-project-morphing-hexapod-kare-halvorsen-81020/>
- V. Joshi, R. Banavar, R. Hippalgaonkar. Design, modeling and controllability of a spherical mobile robot. 13th National Conference on Mechanics and Machines, 2007, p.3-8.

Список использованных источников

- M. Svinin, A. Morinaga, and M. Yamamoto. On the Geometric Phase Approach to Motion Planning for a Spherical Rolling Robot in Dynamic Formulation. 2013 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS) November 3-7, 2013. Tokyo, Japan.
- Mukherjee, R. Minor, M.A. Pukrushpan, J.T. Simple motion planning strategies for spherobot: a spherical mobile robot Decision and Control, 1999. Proceedings of the 38th IEEE Conference on (Volume:3).
- U. Boscain, T. Chambrion, G. Charlot, “Nonisotropic 3-level Quantum Systems: Complete Solutions for Minimum Time and Minimal Energy”, Discrete and Continuous Dynamical Systems-B, Vol. 5, n. 4, pp. 957 – 990 (2005).
- B. Bonnard, M. Chyba. Two applications of geometric optimal control to the dynamics of spin particle. Preprint:
URL: <http://hal.inria.fr/hal-00956828>